Analyse eines Interviews zu studentischen Schwierigkeiten mit Grenzwerten

Peter Riegler

1. November 2021

1 Einführung

In diesem Papier lege ich meine Überlegungen und Analyse zu einem *Decoding*–Interview dar, das am 16.6.2020 im Rahmen eines Treffens des Arbeitskreises *Decoding the Discipllnes* geführt wurde. Zentraler Gegennstand des Interviews ist der mathematische Grenzwert–Begriff, der vom interviewten Experten so definiert wurde:

Definition (Grenzwert): Man sagt, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert a, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index K gibt, so dass $|x_n - a| < \epsilon$ für alle $n > K$.

Weite Teile des Interviews befassen sich mit der Fragestellung:

> Weise mittels Definition nach, dass die Folge $(x_n) = \dfrac{n}{n+17}$ den Limes 1 hat.

Der interviewte Experte bezeichnet diese als konzeptuelle Fragestellung:

> [Ich] mach' mal jetzt 'ne Aufgabe, mit der ich diese Definition abtesten würde und damit Konzepverständnis testen würde [Aufnahmeteil 2, 26:30]

In der Tat wurden mittels dieser Fragestellung im Laufe des Interviews studentische Bottlenecks und auch das Vorgehen des Experten sichtbar. Ich beschreibe diese Bottlenecks in Abschnitt 2 und analysiere sie in Abschnitt 3. Abschnitt 4 dient der Beschreibung des expertenhaften Vorgehens der interviewten Person. In Abschnitt 5 fasse ich Metaphern und Analogien zusammen, die im Zuge des Interviews auftraten bzw. herausgearbeitet wurden und möglicherweise Studierenden helfen können, einige der beschriebenen Bottlenecks zu überwinden. In Abschnitt 6 skizziere ich zu diesem Zweck mögliche Lehrinterventionen.

In diesem Papier werden keine Aussagen zum Geschlecht der beteiligten Personen getroffen. Es wird ausschließlich die männliche Form verwendet, d. h. Passagen in wörtlichen Zitaten, die auf das Geschlecht der beteiligten Personen hinweisen, wurden verändert. Für den Experten wird abkürzend das Symbol **E** verwendet.

In meine Analyse fließen Überlegungen von Jessica Kirsch und Peter Lohse ein, die während einer gemeinsamen Analyse von Teilen des Intervies entstanden sind.

2 Bottlenecks

Ich erkenne im Interview eine Vielzahl teilweise überlappender Bottlenecks, die ich nachfolgend beschreibe und im Abschnitt 3 teilweise analysiere. Diese Bottlenecks lassen sich grob in eine zeitliche Reihenfolge bringen in dem Sinne, dass „spätere“ Bottlenecks in frühen Phasen des Bearbeitens der Fragestellung aus Abschnitt 1 noch nicht zum Tragen kommen. Damit einher geht auch eine gewisse hierarchische Gliederung: Die „früheren“ Bottlenecks sind in der Regel generischer als „spätere“, z. B. weil sie mit Problemlösenstrategien oder studentischen Beliefs zu tun haben. Die nachfolgende Numerierung der Bottlenecks soll diese grobe zeitliche Ordnung ausdrücken.

Manche der Bottlenecks lassen sich zudem generalisieren, indem sie aus dem Kontext Grenzwerte herausgenommen werden. Es erscheint mir plausibel, dass diese auch im Zusammenhang mit anderen mathematischen Begriffen oder Fragestellungen auftreten können.

1. Studierende erkennen nicht, welche einzelnen Schritte sie unternehmen müssen, um die Aufgabenstellung zu lösen.

   Das Interview gibt Hinweise auf die einzelnen Schritte, die **E** unternimmt. Das daraus ableitbare Expertenvorgehen wird in Abschnitt 4 beschrieben.

2. Studierende erwarten, dass Grenzwerte (kalkülhaft) berechnet werden.

   Dieses Bottleneck scheint mir seine wesentliche Ursache in einer besonderen Eigenschaft der Grenzwert–Definition zu haben. Daher sehe ich es nicht losgelöst vom folgenden Bottleneck:

3. Studierenden fällt es schwer zu erkennen, dass viele mathematische Definitionen wertbehafteter Begriffe keine kalkülhafte Bestimmung des Werts erlauben und die Bestimmung des Wertes nur indirekt erlauben. Zusätzlich fällt es ihnen schwer zu erkennen, dass solche Definitionen mitunter notwendig sind.

   Dieses Bottleneck wird in Abschnitt 3.1 am Beispiel der Definition des Grenzwerts untersucht.

4. Studierenden fällt es schwer mathematische Aussagen, hier Definitionen, zu lesen.

   In Abgrenzung zum nachfolgenden Bottleneck 5 sind hier Schwierigkeiten gemeint, die rein sprachlicher Natur sind bzw. mit kognitiven Aspekten der Sprachverarbeitung im Zusammenhang stehen dürften. Dieses Bottleneck wird in Abschnitt 3.4 thematisiert.

5. Studierenden fällt es schwer, den operationalen Charakter mathematischer Definitionen zu erkennen bzw. diese zu operationalisieren.

   Abschnitt 3.2 beleuchtet dies am Beispiel der Definition des Grenzwerts.

6. Studierenden fällt es schwer, mathematische Definitionen als Begriffsvereinbarungen zu sehen und damit zu erkennen, dass die Bedeutung der definierten Begriffe nicht deckungsgleich mit ihren eigenen Vorstellungen sein muss.

Dieses Bottleneck, das auch in der Literatur beschrieben ist, wird in hier im Abschnitt 3.3 analysiert.

7. Studierenden fällt es schwer zu erkennen, dass der Begriff „näher kommen", der im Zusammenhang mit Grenzwerten verwendet wird, sich wesentlich von seiner Alltagsbedeutung unterscheidet.

   Betrachtet man die Unterschiede zwischen den Begriffsverständnissen, kann man die Alltagsvorstellungen zum Begriff „näher kommen" auch als Fehlvorstellungen bezeichnen. Abschnitt 3.5 beleuchtet dies.

8. Studierenden fällt es schwer mit den Symbolen zurechtzukommen, die in Definitionen auftreten.

   Dieses Bottleneck wird in Abschnitt 3.6 beschrieben und analysiert.

9. Studierende sprechen von, dass der Grenzwert sich annähert.

   Dieses Bottleneck wird in Abschnitt 3.7 beschrieben.

10. Studierende verstehen Grenzwert als ungefähre Größe.

    Dieses Bottleneck wird in Abschnitt 3.8 beschrieben.

11. Studierende sehen die Formulierung „sei $\epsilon > 0$" möglicherweise als mathematisches Ritual.

    Dieses Bottleneck hat einen kognitiven und einen emotionalen Aspekt. Der kognitive Aspekt besteht darin, dass Studierende zum einen die Bedeutung dieser Formulierung nicht erkennen und zum anderen wegen des vermeintlich rituellen Charakters glauben, dass keine Bedeutung vorhanden ist. Der emotionale Aspekt besteht darin, dass sich Studierende kulturell entfremdet fühlen, weil ihnen das vermeintliche Ritual fremd ist.

    Diese Bottleneck wird hier zusammen mit Bottleneck Nr. 5 in Abschnitt 3.2 diskutiert.

12. Studierenden fällt es schwer, im Kontext der Bestimmung von Grenzwerten die Vielschichtigkeit des Vorgehens zu sehen und zu erkennen, auf welcher Ebene sie sich momentan befinden.

    E benennt explizit die drei Ebenen Rechnen, Muster erkennen, Konzept. 3.9 geht darauf ein.

13. Studierenden fällt es schwer Muster zu erkennen, die bei Berechnungen im Kontext Grenzwerte hilfreich sind.

    Dieses Bottleneck wird in Abschnitt 3.10 kurz beleuchtet.

3 Analyse der Bottlenecks

3.1 Bottleneck 3: Definitionen ohne kalkülhafte Bestimmung eines Attributwertes des definierten Konzepts

Im konkreten Fall der Definition des Konzepts Grenzwert erlaubt die Definition von S. 1 keine kalkülhafte Bestimmung des Grenzwerts. Dies ist z. B. im Gegensatz zur Definition der mittleren Geschwindigkeit:

Definition (mittlere Geschwindigkeit): Die (mittlere) Geschwindigkeit $\overline{v}$ eines Objekts zwischen den Zeitpunkte t_1 und t_2 ist der Quotient aus der Positionsänderung $x(t_2) - x(t_1)$ des Objekts und der verstrichenen Zeit $t_2 - t_1$:

$$\overline{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Diese Definition definiert mit der mittleren Geschwindigkeit ein Konzept, das als Attribut einen Zahlenwert hat, und sie gibt an, wie dieser Zahlenwert berechnet werden kann. Abb. 1 visualisiert den berechnenden Charakter dieser Definition.

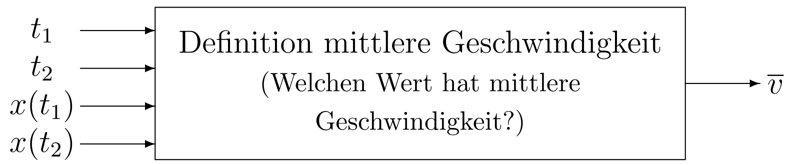

Abbildung 1: Visualisierung der Definition der mittleren Geschwindigkeit als Operation, die aus vier Eingaben den Wert der mittleren Geschwindigkeit berechnet.

Abbildung 2: Visualisierung einer hypothetischen Definition der mittleren Geschwindigkeit, die keine Möglichkeit zur kalkulatorischen Bestimmung des Zahlenwerts der mittleren Geschwindigkeit bereitstellt.

Abbildung 3: Visualisierung der möglichen Erwartungshaltung Studierender an die Definition des Grenzwerts als Operation, die erlauben soll für eine gegebene Folge (x_n) ihren Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$ zu berechnen.

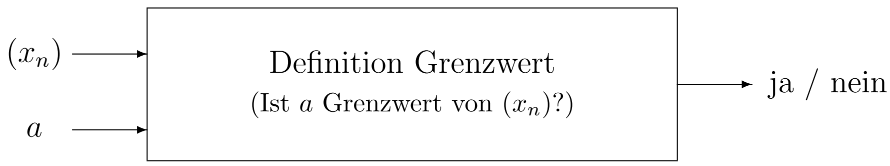

Abbildung 4: Visualisierung der tatsächlichen Funktion der Definition des Grenzwerts. Sie überprüft, ob die Eingabe a der Grenzwert der Folge (x_n) ist. Sie berechnet also den Wahrheitswert von $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Wie die mittlere Geschwindigkeit hat auch das Konzept des Grenzwerts als Attribut einen Zahlenwert. Im Gegensatz zur Definition der mittleren Geschwindigkeit erlaubt die Definition des Grenzwerts jedoch keine kalkülhafte Berechnung dieses Zahlenwerts. Die Definition des Grenzwerts erlaubt lediglich festzustellen, ob ein gegebener Wert a Grenzwert der vorliegenden Folge ist (Verifikation) oder ob das nicht der Fall ist (Falsifikation). Die Definition beantwortet somit nicht (direkt) die Frage „Welchen Wert hat der Grenzwert der gegebenen Folge?“ Die dazu analoge Fragestellung wird dagegen von der Definition der mittleren Geschwindikgkeit beantwortet. Die Definition der Grenzwerts beantwortet stattdessen die Frage “Ist a der Grenzwert der gegebenen Folge?“ Damit erlaubt diese Definition allenfalls eine indirekte Bestimmung des Zahlenwerts des Grenzwerts, nämlich mittels eines Verfahrens von Versuch und Irrtum. Es wird postuliert, dass $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ gilt, und dann mittels Definition überprüft, ob dies zutrifft. Wenn dies nicht der Fall ist, wird ein anderer Grenzwert postuliert usw., bis entweder ein Grenzwert gefunden wird oder mittels einer logischen Argumentation unter Zuhilfenahme der Definition begründet wird, dass kein Grenzwert exisiert.[1]

Abb. 4 visualisiert diesen besonderen Charakter der Definition des Grenzwerts. Sie liefert eben nicht den Grenzwert, sondern beantwortet nur die Frage, ob ein Kandidat a

[1]Indem gezeigt wird, dass „Es gibt ein a, das Grenzwert der Folge ist“ eine falsche Aussage ist bzw. dass „Für alle Werte von a ist a nicht Grenzwert der Folge“ eine wahre Aussage ist.

tatsächlich Grenzwert ist. Wenn Studierende diesen besonderen Charakter der Definition des Grenzwerts nicht erkennen, haben sie möglicherweise die Erwartungshaltung, dass die Definition des Grenzwerts analog zur Definition der mittleren Geschwindigkeit funktioniert, also die direkte Bestimmung des Zahlenwerts des Grenzwerts erlaubt. Diese Erwartungshaltung ist in Abb. 3 visualisert.

Die im Interview exemplarisch bearbeitete Fragestellung (siehe Abschnitt 1) kann daher mittels der Definition des Grenzwerts beantwortet werden, eben weil in der Fragestellung ein Kandidatenwert für den Grenzwert benannt ist. Eine ganz andere Fragestellung wäre

$$\text{Berechnen Sie den Grenzwert } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+17}.$$

Alleine mittels Definition wäre diese Fragestellung nur beantwortbar, indem sukzessive Testwerte für den Grenzwert angenommen würden.

Die Erwartung Studierender, etwas berechnen zu müssen, wird von **E** beschrieben, indem er hypothetische Studierende sprechen lässt:

> „Warum fangen Sie jetzt an mit ‚sei ϵ größer Null gegeben'? Was soll denn das? Wir machen doch kein Mathe[2], wir wollen doch was ausrechnen. Wieso sei ϵ größer Null gegeben?"Das ist tatsächlich ein Einwand, der von Studenten kommt. [Aufnahmeteil 3, 2:30]

Lehrgeschehen und Prüfungsinhalte können vermutlich diese Erwartungshaltung hervorrufen oder verstärken. Dort stehen erfahrungsgemäß die kalkülhafte Bestimmung der Zahlenwerte von Grenzwerten im Vordergrund. Daher scheint es auch plausibel, dass Studierende Widerstände gegenüber der Definition des Grenzwerts entwickeln, da sie nicht die Funktion erfüllt, die sie von ihr erwarten. Vermutlich führt dies zudem dazu, dass Studierenden Definitionen dieser Art „mathematisch verkompliziert“ erscheinen.

Möglicherweise sind sich Studierende nicht bewusst, dass Konzepte, die als Attribut einen Zahlenwert haben, in zwei Kategorien aufgeteilt werden können: Solche, deren Definition eine direkte, kalkülhafte Berechnung des Attributwertes erlauben, und solche, bei denen das nicht der Fall ist.[3] Im letzteren Fall erlaubt die Definition nur eine indirekte Bestimmung des Attributwertes. Konzepte der ersten Kategorie ermöglichen Definitionen nach dem Schema, das in Abb. 1 und Abb. 3 visualisiert ist. Um den besonderen Charakter der Definition des Grenzwerts im Kontrast zum besonderen Charakter der Definition der mittleren Geschwindigkeit zu zeigen, stellt Abb. 2 schematisch eine hypothetische Definition der mittleren Geschwindigkeit dar, die keine kalkülhafte Berechnung des Geschwindigkeitswertes beinhaltet.

[2] Der originale Wortlaut ist „Wir machen doch Mathe, wir wollen doch was ausrechnen.“ Nach dem Lesen dieser Passage hat **E** geäußert, dass er „Wir machen doch Mathe“ sagen wollte, weil dies die typische Erwartung von Studierenden sei.

[3] Neben der Unterscheidung, ob ein Attributwert der definierten Größe berechnet werden kann oder nicht, ist möglicherweise auch eine Unterscheidung relevant, ob die zu definierende Größe immer existiert.

3.2 Bottleneck 5: Operationaler Charakter mathematischer Definitionen

Dieses Bottleneck ist ganz eng mit der Aufgabenstellung verbunden, denn **E** äußert explizit, dass der Zweck der Aufgabenstellung darin besteht festzustellen, ob Studierende die Grenzwert–Definition operationalisieren können:

> Das ist eine arithmetisch völlig triviale Aufgabe, aber eine konzeptionell für meine Studierenden sehr schwierige Aufgabe. [...] Mit so 'ner Aufgabe/Fragestellung könnte ich jetzt explizit abtesten, ob diese Definition operationalisiert werden kann. [Aufnahmeteil 2, 27:30]

Operationalisieren bedeutet, die Definition in eine Abfolge von Operationen zu übersetzen (also letztendlich in einen Algorithmus) oder einen solchen Algorithmus aus der Definition herauszudestillieren. Mit Hilfe dieses Algorithmus kann im nächsten Schritt das bewerkstelligt werden, was Abb. 4 bereits bildlich dargestellt hat: Für eine gegebe Folge (x_n) und einen hypothetischen Grenzwert a entscheidet der Algorithmus, ob a der Grenzwert dieser Folge ist.

Aus formallogischer Sicht lässt sich die Definition operationalisieren als

$$(x_n) \text{ hat Grenzwert } a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} \; \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon \tag{1}$$

Auf den ersten Blick könnte man dies als rein symbolische Umschreibung von „zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index K, so dass für alle Werte $n > K$ gilt: $|x_n - a| < \epsilon$“ ansehen. Für Personen, die nicht mit der Sprache der (Prädikaten-)Logik vertraut sind, operationalsiert (1) den Grenzwertbegriff ebenso wenig wie die verbale Beschreibung. Für Experten beschreibt dies jedoch sichtbar die Operationen, die durchgeführt werden müssen, und deren Reihenfolge:

Algorithmus 1 (mit Eingaben (x_n) und a):

1. Wähle einen möglichen Wert für ϵ. Möglich sind alle Werte, die $\epsilon > 0$ erfüllen.
2. Finde für diesen Wert von ϵ unter Kenntnis der Folge (x_n) und dem hypothetischen Grenzwert a mittels Algorithmus 2 eine natürliche Zahl K, die die geforderten Eigenschaften erfüllt.
3. Wenn *keine* Zahl K gefunden werden konnte, bedeutet dies, dass a nicht die Eigenschaft hat, Grenzwert der Folge (x_n) zu sein.
   Andernfalls: Solange noch nicht *alle* möglichen Werte von ϵ gewählt wurden, wähle einen bisher nicht gewählten möglichen Wert für ϵ und führe damit Schritt 2 aus. Falls alle[4] möglichen Werte von ϵ gewählt wurden (und

[4]Natürlich ist es für $\epsilon \in \mathbb{R}$ wegen der Nichtendlichkeit von $\mathbb{R}$ nicht möglich *alle* Werte von ϵ „durchzuspielen“. Das hat praktische Konsequenzen, ist aber aus meiner Sicht an dieser Stelle sekundär. Mit einer Informatikperspektive könnte man sagen, dass es hier um ein funktionales Programm und nicht um ein prozedurales Programm geht. *Was* gemacht wird, ist hier primär. *Wie* es gemacht wird, ist sekundär.

> jedes Mal ein Wert K gefunden wurde), bedeutet dies, dass a tatsächlich der Grenzwert der Folge (x_n) ist.

Algorithmus 2 (mit den Eingaben (x_n), a und ϵ) soll hier nicht weiter operationalisiert werden.

Im Interview operationalisert **E** die Definition zunächst, indem er den in der Definition auftretenden Größen eine geometrische Bedeutung gibt und sich diese Größen so veranschaulicht [Aufnahmeteil 3, ab 0:00]. Ich vermute, dass es sich bei Operationalisierung und Veranschaulichung nicht um zwei gänzlich unahbängige Schritte handelt: **E** operationalisiert die Definition des Grenzwerts, wozu er eine Repräsentionsform benutzt, die hier die geometrische Veranschaulichung ist.

Im Dialog mit einem der Interviewer entwickelt sich eine weitere Repräsentationsform bzw. Perspektive, die das Wechselspiel zwischen Algorithmus 1 und 2 in der obigen Operationalisierung in den Fokus nimmt. Dabei wird die Definition zur Grenzwert–Bestimmung als Dialog oder „epistemisches Spiel“ zwischen zwei Personen beschrieben:

> Interviewer: [A]lso in anderen Worten, du sagst, wenn in der Definition gefordert ist, dass für jedes ϵ irgendetwas gilt. Ist dann sozusagen dein Job. Nein, also ich hör da jetzt irgendwie so raus, — das ist vielleicht meine Interpretation — hier sind zwei Personen involviert. Dein Gegenspieler stiehlt dir ein ϵ [, das] man nicht beeinflussen kann.
>
> **E** : In manchen Lehrbüchern ist es genauso aufgezogen, wie du es sagst. Es ist ein Dialog zwischen zwei Gegenspielern. A gibt dem B ein ϵ vor und der B muss jetzt ein K finden. Und ich als Beweiser bin gleichzeitig A und B, der Spieler und der Gegenspieler. [Aufnahmeteil 3, 4:00]

Person A verkörpert dabei Algorithmus 1 und Person B Algorithmus 2. Dieses „ϵ–K–Spiel“ ist allerdings so angelegt, dass es kein Ende finden kann: So sehr sich Spieler B auch abmüht, Spieler A kann immer mit einem neuen Wert für ϵ kommen, weil die Anzahl der möglichen Werte für ϵ unbegrenzt ist. Das Spiel würde also niemals ein Ende finden.[5] Damit das Spiel endlich wird, darf Spieler A keine konkreten Werte für ϵ wählen, sondern muss ϵ „beliebig, aber fest“ wählen, also parametrisieren. In den Worten von **E** :

> [W]enn wir von konkreten Epsilons ausgehen, dann hat dieses Spiel kein Ende. [Aufnahmeteil 3, 26:29]
>
> Und drum muss ich das abstrahieren von konkreten Epsilons, von konkreten Zahlenwerten zu einem beliebigen $\epsilon > 0$. Und deswegen fang' ich an mit der Aussage „sei ϵ beliebig größer Null“. [Aufnahmeteil 3, 28:14]

[5] Genauer formuliert: Wenn $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ gilt, wird das Spiel nie ein Ende finden. Geht dagegen das Spiel zu Ende, weil Spieler B für das von Spieler A gegebene ϵ keinen K-Wert findet, bedeutet dies, dass a nicht der gesuchte Grenzwert ist oder ggf. dass der Grenzwert gar nicht existiert.

Damit löst **E** auch die Bedeutung[6] der Formulierung „sei $\epsilon > 0$“ auf, die möglicherweise von manchen Studierenden als bedeutungsloses Ritual empfunden wird (Bottleneck 11). Im Interview werden von den Interviewern sowohl die kognitiven als auch die emotionalen Aspekte dieses Bottlenecks adressiert. Der eine Interviewer fragt nach der Bedeutung:

> Du sagst, ich muss jetzt anfangen, indem ich hinschreibe „sei $\epsilon > 0$ gegeben“. Warum muss ich damit anfangen? Was bedeutet das eigentlich? Dass ich das schreibe? Welche Funktion haben diese, diese drei Wörter sozusagen? [Aufnahmeteil 3, 1:58]

Der andere Interwiewer äußert das Bedürfnis, ϵ konkret mit einem Zahlenwert belegen zu dürfen:

> [I]ch als Student würd’ mir da wünschen, dass ich mal ein ϵ vorgeben darf und schauen, was da passiert. [Aufnahmeteil 3, 16:46]

3.3 Bottleneck 6: Mathematische Definitionen als Begriffsvereinbarungen

Dieses Bottleneck wird im Interview nur an einer Stelle und dort eher indirekt sichtbar:

> Interviewer: Also ich hab’ mich sowieso gefragt — du hast so gesagt, ganz natürlich „Sei $\epsilon > 0$ gegeben“. Da hab’ ich mich gefragt: Warum keinen Wider[spruchsbeweis]? Man könnte das ja das auch andersrum machen. Also, ich hab’ auch schon an dem allerersten so „ganz natürlich, damit fängt man an“, hab’ ich gedacht: So, aha. Könnte man auch nicht machen (.) äh (.) den Beweis andersrum (.)?
>
> **E** : Naja, dieses „natürlich“ das ist das Experten–Natürlich. Das Mathematiker–Natürlich. Geb’ ich zu, ja.
>
> Interviewer: Das ist Erfahrungswissen?
>
> **E** : Ich weiß es net. Es ist das, was in dieser Definition steht. Auf einer Sprachebene, die im Alltag halt nicht gebräuchlich ist. [Aufnahmeteil 3, 5:20]

Ich habe den Eindruck, dass hier eine Grundhaltung bzw. Grunderwartung der Mathematik als akademische Gemeinschaft zum Ausdruck kommt: Die Grunderwartung mit mathematischen Begriffen arbeiten zu können, *ohne* sich ein inneres Bild vom Begriff gemacht zu haben. Damit will ich nicht sagen, dass die Mathematik eine internalisierte Begriffsbildung nicht als hilfreich betrachtet. Ich sehe jedoch die Erwartungshaltung, alleine mit dem arbeiten zu können, „was in dieser Definition steht“ — alleine auf Grundlage der sprachlichen Ebene.

Das bedeutet auch: Ich muss keine Vorstellung vom definierten Konzept haben, um damit arbeiten zu können. Im Zweifelsfall zählt die Definition und nicht meine Vorstellung

[6] Bedeutung sowohl im Sinne von *meaning* als auch *significance*

vom definierten Begriff. Der definierte Begriff muss nicht deckungsgleich mit meiner eigenen Vorstellung sein.

Es geht hier um den begriffs*vereinbarenden* Charakter mathematischer Definitionen, im Gegensatz etwa zu begriffs*beschreibenden* bzw. *-erklärenden* Definitionen in Lexika. Die damit verbundenen Schwierigkeiten sind in der Literatur bekannt und beschrieben. [3, 4]

3.4 Bottleneck 4: Lesen mathematischer Definitionen

Selbst wenn Studierende erkennen, dass es eine vorliegende Definition nicht erlaubt, einen Attributwert der definierten Größe zu bestimmen, sie zudem in der Lage sind, die Definition zu operationalisieren, und auch die Definition als Vereinbarung eines Begriffes sehen, können Studierende an der syntaktischen Struktur und der Semantik der verwendeten Begriffe scheitern. Vereinfacht gesprochen kommt nach dem Lesen der Definition etwas anderes im Kopf der Studierenden an als das, was ursprünglich auf dem Papier stand. Es gelingt ihnen nicht, die grammatikalische Struktur der Definition korrekt zu analysieren. Sie erkennen z. B. nicht oder nicht korrekt, worauf sich in einer Definition verwendete Relativpronomen beziehen. [1] Dass es ihnen nicht gelingt, die grammatikalische Struktur zu analysieren, bedeutet nicht zwingend, dass sie nicht dazu in der Lage sind. Möglicherweise verwenden sie beim Lesen nicht ihre Fähigkeit dies zu tun.

E vermutet dazu Folgendes:

> [...] der logische Fluss in dieser Argumentation, angefangen von dem ϵ und resultierend in dem K und dann nochmal die Zusammenfassung in einer Phrase, also „ab K gleich diesem hier bleiben die Folgenglieder in dem vorgegebenen ϵ–Streifen“ das, das fällt schwer. Ich weiß nicht, wahrscheinlich weil man drei Dinge gleichzeitig im Kopf haben muss, das ϵ, die x_n's, das a und das K. Vier Dinge, ja?, die man hier logisch immer richtig kombiniert im Kopf haben muss. [Aufnahmeteil 3, 18:11]

Er spielt dabei wohl auf *cognitve overload* bzw. die starke Beschränktheit des menschlichen Kurzzeitgedächtnisses an. Die vier Dinge, die man hier gleichzeitig im Kopf haben muss, belegen nach Millers (7 ± 1)–Theorie schon ca. die Hälfte der Kurzzeitgedächtnisses. Es sei denn, man ist Experte und hat gelernt diese vier Dinge zu „chunken“ d. h. in einen Sinnzusammenhang und damit in eine Einheit zu bringen, die nur noch einen Speicherplatz des Kurzzeitgedächtnisses belegt.

Für mich eröffnet das obige Zitat die Möglichkeit die Begrenztheit des Kurzzeitgedächtnisses mit der *Good Enoogh Theory* [2] in Verbindung zu bringen: Diese Theorie geht davon aus, dass der Prozess der menschlichen Sprachwahrnehmung sich in der Regel nicht als grammatikalische Analyse (Parsen) beschreiben lässt. Stattdessen setzen Menschen die Satzbestandteile aufgrund des Kontexts und bisheriger Erfahrungen ungeachtet grammatikalischer Regeln zu einem (konstruierten) Sinnzusammenhang zusammen, der durchaus von der tatsächlichen Bedeutung abweichen kann.

Studierenden verfügen oft nicht über einschlägige (und erfolgreiche) Vorerfahrungen in der Verarbeitung mathematischer Sprache. Der Kontext ist ohnehin für sie neu, weil die Konzepte neu sind. Ich habe an anderer Stelle argumentiert und gezeigt, dass es für Studierende dann hilfreich ist, mathematische Aussagen zu parsen. [1]

Die mögliche Verbindung zwischen der (7 ± 1)–Theorie und der *Good Enough Theory* sehe ich im Folgenden: Chunken scheint davor zu schützen, dass die Aussage „im Gehirn falsch zusammengesetzt“ wird. Der *Chunk* ist bereits ein Ganzes und kann allenfalls relativ zu anderen Satzbestandteilen sprachlich falsch eingeordnet werden. Mit seiner internen sprachlichen Struktur passiert dies jedoch nicht. Diese bleibt intakt. Für mich besteht der *Chunk* hier aus geschachtelten quantifizierten Aussagen („für alle ... gibt es ein“, „es gibt ein ..., so dass für alle“).

3.5 Bottleneck 7: Bedeutung von Näherkommen

Die konzeptuellen Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit dem Grenzwertprozess auftreten, scheinen mir ihre Ursache nicht im Begriff *Grenzwert* zu haben, sondern im Begriff *näher kommen*.[7] Experten wie Laien haben vermutlich die Vorstellung, dass eine Folge (x_n) den Grenzwert a hat, wenn (x_n) dem Wert a (letztendlich) immer näher kommt. Der Unterschied zwischen Experten und Laien besteht darin, was sie unter Näherkommen verstehen. Das Interview gibt Hinweise darauf.

Das mathematische Verständnis des Näherkommens von (x_n) an a wird in der Grenzwert–Definition beschrieben: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index K, so dass $|x_n - a| < \epsilon$ für alle $n > K$ gilt. Formal notiert bedeutet Näherkommen also:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} \; \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon \tag{2}$$

Was Studierende möglicherweise unter Näherkommen verstehen, wird im Interview exemplarisch von einem der Interviewer geäußert. Er verwendet dabei für „Woran kommt etwas näher?“ die Formulierung „wohin geht es?“:

> [W]enn ich wissen will, wo jemand hingeht, dann guck’ ich mir an, in welcher Richtung bewegt er sich gerade. [...] Wenn ich wissen will, wo fliegt der Ball hin, dann schau’ ich mir seine Geschwindigkeitsvektoren an. [...] Aber auch im Alltag, wenn ich wissen will, wo irgendjemand hingeht, [...] dann schreib’ ich dieser Person oder diesem Ding eine Bewegung zu. [Aufnahmeteil 3, 12:40]

Aus dem Interview wird nicht ganz klar, welche Eigenschaft die Bewegung haben muss, damit von einem Näherkommen gesprochen werden kann. Im Zusammenhang mit der graphischen Darstellung einer Folge mit dem Grenzwert 1 änlich zu der in Abb. 5 (Mitte) erwartet der Interviewer die Eigenschaft, dass die Bewegung von einer Seite her erfolgen muss:

> Die [Folgenglieder] gehen ja erstmal über 1 hinaus. Die gehen ja nicht zu 1 hin. [Aufnahmeteil 3, 13:25]

[7] Studierende werden vermutlich eher den Begriff *annähern* verwenden. Ich verwende *näher kommen*, weil es die linguistische Analyse erleichtert.

Aus mathematischer Sicht beschreibt diese Erwartung einen Spezialfall des Näherkommens, der bereits vorher im Interview von **E** als „monotone Konvergenz“ bezeichnet wurde:

> [...] die Folgenglieder wachsen jetzt zum Beispiel monoton gegen diesen Grenzwert a. Was ja nur ein Sonderfall ist. Der allgemeine Konvergenzbegriff setzt ja nicht nur monotone Konvergenz voraus. Ja? Auf diese Art kann ich jetzt, wenn ich das so darstelle, eigentlich schöner verschiedene Arten der Konvergenz illustrieren. Das wäre 'ne monotone Konvergenz und, wenn ich 'ne Folge habe, die so ausschaut, dann hätt' ich 'ne alternierende Konvergenz, die sich von unterschiedlichen Seiten an den Grenzwert schließlich annähert. [Aufnahmeteil 1, 20:34]

Was Studierende unter Näherkommen verstehen, kann also *eine* aus einer Vielzahl von speziellen Vorstellungen darüber sein, wie Näherkommen stattfindet. Damit haben wir eine Situation, die zu Fehlkonzepten führen kann. Für Fehlvorstellungen ist häufig charakteristisch, dass es sich um Alltagsvorstellungen handelt, die Spezialfälle des wissenschaftlichen Konzepts sind. Solche Fehlvorstellungen sind aber nicht unbedingt feste, „alternative Vorstellungen“, sondern sind eher spontan gebildete Konzeptionalisierungen. Die meisten Studierenden, die *momentan* eine Vorstellung von Näherkommen haben, die dem Begriff monotone Konvergenz entspricht, werden sicherlich schnell ihre Vorstellung erweitern, wenn sie mit alternierenden Folgen wie in Abb. 5 (Mitte) konfrontiert werden. Wenn sie mit Folgen wie in Abb. 5 (rechts) konfrontiert werden, werden sie vermutlich auch eine Vorstellung von Näherkommen als „*immer* näher kommen“ durch eine Vorstellung von „*letztendlich* immer näher kommen“ ersetzen.

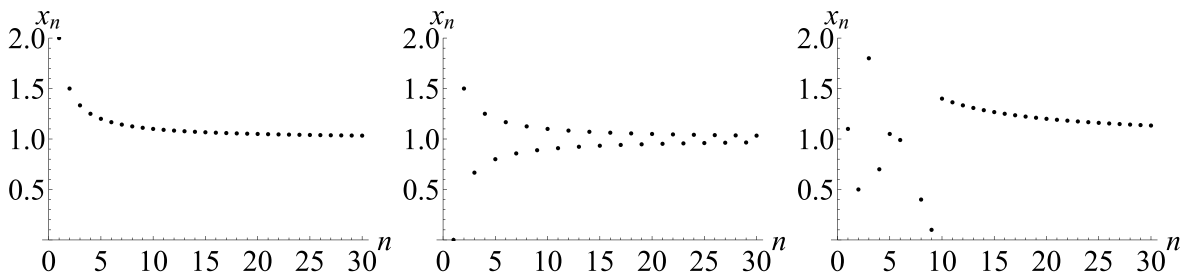

Abbildung 5: Unterschiedliche Mölgichkeiten des Näherkommens an den Grenzwert: monoton (links); alternierend (Mitte); ein Näherkommen findet erst ab einem bestimmten Index (hier 10) statt (rechts).

Aus linguistischer Sicht liegt bei *näher kommen* eine Tilgung vor. Näher kommen *als was*? Eine nahe liegende Antwort ist „näher kommen als *zuvor*“, d. h. der Abstand $|x_{n+1} - a|$ des Folgenglieds x_{n+1} vom Grenzwert a ist geringer als der im Schritt zuvor, also dem Abstand $|x_n - a|$ des Folgenglieds x_n von a. Ich halte es für plausibel, dass für viele Studierende dies (oder Varianten davon) die Vorstellung von Näherkommen ist.

Die formale Beschreibung[8] dieses Verständnisses von Näherkommen ist

$$\exists K \in \mathbb{N} \, \forall n > K : |x_{n+1} - a| < |x_n - a|. \tag{3}$$

Alleine aus einem optischen Vergleich von (2) und (3) werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede deutlich. Letztere „Definition“ von Näherkommen kommt ohne das „problematische“ ϵ aus. Sowohl (2) als auch (3) heben die linguistische Tilgung auf und benennen explizit das Etwas in „näher kommen *als etwas*“. Der wesentliche Unterschied besteht darin, *womit* verglichen wird: einmal mit dem Abstand zum Grenzwert, wie er unmittelbar zuvor war; einmal mit einem beliebigen, aber festen Abstand ϵ.

Die Analyse in diesem Abschnitt gibt Hinweise, was zu tun ist um Studierenden zu helfen, das hier beschriebene Bottleneck zu überwinden: Ihre Vorstellung von Näherkommen muss mit dem mathematischen Begriff des Näherkommens, wie er implizit in der Grenzwert–Definition verwendet wird, konstrastiert werden. Und Studierenden muss geholfen werden einzusehen, weshalb ihre Konzeption von Annähern zu einschränkend ist. Abschnitt 6.1 skizziert, wie das geschehen könnte.

3.6 Bottleneck 8: Zurechtkommen mit Symbolen

Die Grenzwert–Definition bringt eine Vielzahl von Symbolen mit sich. Das kann Studierende zum einen einschüchtern. Zum anderen müssen Studierende diese Symbole in irgendeiner Form verarbeiten. Dieses Bottleneck hat also kognitive und emotionale Aspekte. Einer der Interviewer spricht beide Aspekte an:

> Und ich geb’ dir noch eins drauf und noch eins. Genau. Und wie man diese Abwehr dann erzeugt. Ich hab’ mich gefragt, als Student ist das meine einzige Chance Konvergenz zu verstehen? Dass ich mit all diesen Buchstaben klarkommen muss? [Aufnahmeteil 3, 31:00]

Außerdem weist der Interviewer darauf hin, dass es Studierenden schwer fallen kann, die Grenzwert–Definition zu akzeptieren. Die hier vom Interviewer stellvertretend für Studierende gestellten Fragen sind gültig und sinnvoll, dürften aber in der Lehre bisher nur selten beantwortet werden. Es scheint mir plausibel, dass Studierende ein Bild von Mathematik als etwas unnötig Kompliziertem entwickeln, wenn die Antwort auf solche Fragen ausbleibt (bzw. die Fragen nicht gestellt werden) und die Studierenden die Erfahrung machen, dass sie trotzdem irgendwie mit der Mathematik zurechtkommen.

3.7 Bottleneck 9: Fehlende Unterscheidung zwischen Grenzwertprozess und Grenzwert

Im Zuge des Interviews spricht **E** eine problematische Vewendung des Begriffs Grenzwert durch Studierende an:

[8] Die formale Beschreibung dient hier alleine dazu zu beschreiben, worin das möglicherweise andere Verständnis der Studierenden besteht. Ich behaupte nicht, dass Studierende ihr Verständnis formalisieren.

> Da krieg' ich dann so Formulierungen, die auf ganz eklatante Fehlverständnisse hindeuten. Da gibt's zum Beispiel die Sprechweise „der Limes geht gegen 1". [...] [D]ieses „der Limes geht gegen 1" zeugt von 'nem ganz wesentlichen Missverständnis, weil ein Limes nicht geht. Der Limes ist der Grenzwert und der ist fest und das ist ein ganz wichtiges Detail, wenn man über Grenzwerte redet, dass man nicht [...] die Vorstellung hat, der Limes geht irgendwie, sondern der Limes ist fest, und das, was geht, das sind Funktionsausdrücke oder Terme oder was auch immer. Daran merk ich, dass es [...] 'ne starke konzeptionelle Schwierigkeit gibt. [Aufnahmeteil 1, 23:00]

Im Rahmen des Interviews wird dieses Bottleneck jedoch nicht tiefer beleuchtet.

3.8 Bottleneck 10: Grenzwert als ungefährer Wert

Dieses Bottleneck wird im Rahmen des Interviews ebenfalls nicht tiefergehend beleuchtet. **E** beschreibt es so:

> Vielleicht kann ich es nochmal unterstreichen: Oft kommt auch die Formulierung „ein Limes ist ja keine feste Zahl, sondern ein Limes ist nur ein ungefährer Wert". Daran merk' ich dann, dass dann ganz wesentliches Missverständnis ist. Dass ein Limes eine andere Art von Größe ist, irgendwas Ungefähres.

3.9 Bottleneck 12: Vielschichtigkeit des Vorgehens

E analysiert, dass die Bestimmung von Grenzwerten drei Ebenen involviert, die von Studierenden getrennt werden sollten. Er vermutet zudem, dass er in der Lehre zu schnell zwischen diesen Ebenen wechselt.

> Ich wollte vielleicht noch ergänzen, dass ich mich oft auch bei einem didaktischen Fehler, wahrscheinlich, ertappe, dass ich zwischen diesen drei Ebenen der Rechenfertigkeit, der Mustererkennung, des Konzepts nicht sehr kontrolliert hin- und herwechsele.

Die Selbstanalyse von **E** impliziert, dass diese Ebenen trennbar sind. Vermutlich ist das der Fall. In der bisherigen Analyse in diesem Papier spielte Rechenfertigkeit noch keine Rolle. Berechnungen betreten, was den zeitlichen Ablauf der Grenzwertbestimmung betrifft, erst mit Bottleneck 13 in Abschnitt 3.10 die Bühne, ebenso die Mustererkennung.

Die Ebene der Mustererkennung kann allerdings auch in der bisherigen Analyse erkannt werden, namentlich bei der Operationalisierung der Definition, wenn man unter Mustererkennung auch das Erkennen sprachlicher Muster versteht. Die konzeptuelle Ebene dominiert die bisherige Analyse und dominierte auch das Interview.

3.10 Bottleneck 13: Erkennen von Mustern bei der Berechnung von Grenzwerten

Sobald durch die Operationalisierung der Grenzwertdefinition klar ist, dass die Ungleichung

$$|x_n - a| < \epsilon \tag{4}$$

nach n gelöst werden muss, um K zu bestimmen, treten Rechenfertigkeit und das Erkennen algebraischer Muster in den Vordergund. Im Interview nimmt das Lösen dieser Ungleichung nur wenig Raum ein. **E** beschreibt zunächst sein Vorgehen generisch mit:

> Jetzt kommt sozusagen das intuitiv mathematisch Kreative. Was mach' ich jetzt mit diesem Betrag hier? Was mach' ich mit dieser Ungleichung? Und das ist gar nicht weiter schwer, denn ich schreib mir das mal um [...]

Im Interview ist die Ungleichung (4) wegen $x_n = n/(n+17)$ und dem behaupteten numerischen Wert $a = 1$ für den Grenzwert konkret

$$\left|\frac{n}{n+17} - 1\right| < \epsilon.$$

Mustererkennung beinhaltet hier für **E** zu erkennen, dass das Argument des Betrags als ein Bruch statt einer Differenz geschrieben werden kann. Es beinhaltet sicherlich auch vorauszuahnen, dass dieser Schritt dem Ziel, (4) nach n aufzulösen, näher bringt. (**E** benennt dies nicht explizit.) Mustererkennung beinhaltet auch zu erkennen, dass hier die Betragsbildung keine Fallunterscheidung nach sich zieht und die Ungleichung sich tatsächlich wie angestrebt nach n auflösen lässt.

4 Schrittweises Vorgehen des Experten

Für mich ist im Interview folgendes, schrittweises Vorgehen des Experten beim Bearbeiten der Fragestellung von S. 1 direkt sichtbar. Dass in diesem Vorgehen einige Expertenmerkmale, die in Abschnitt 3 beschrieben wurden, nicht genannt werden, bedeutet nicht, dass sie keine Rolle spielen. Es bedeutet nur, dass sie in den Interviewpassagen, in denen **E** explizit an der Lösung der Fragestellung arbeitet, nicht *direkt* sichtbar sind.

1. **E** erkennt, dass in der vorliegenden Fragestellung der Grenzwert der gegebenen Folge *nicht* kalkülhaft berechnet werden soll, sondern dass die Aufgabe mittels der Kriterien gelöst werden muss, die die Definition zur Verfügung stellt:

   > Und hier steht in der Aufgabe „Weise mit Hilfe dieses Kriteriums“, nicht mit Hilfe von Rechenregeln, die es mir viel einfacher machen würden, sondern wirklich unter Anwendung dieses Kriteriums, also durch Spielen dieses Spiels, dieses ϵ-K–Dialogspiels: „Weise mittels dieses Kriteriums nach, dass diese Folge hier gegen diesen Limes geht.“ [Aufnahmeteil 3, 10:02]

2. **E** operationalisiert die Definition.

   > Dann ist der erste Satz, den man immer hinschreibt: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Ja? [...] [I]ch gebe mir so ein ϵ vor. [...] Die Aufgabe ist jetzt, finde ein K (.) ein K mit der Eigenschaft, ja eben mit dieser Eigenschaft, dass das hier erfüllt ist [unterstreicht dabei Bedingung: $|x_n - a| < \epsilon$ für alle $n > K$]. [Aufnahmeteil 3, 0:45]

3. **E** parametrisiert ϵ. „Sei $\epsilon > 0$ gegeben", d. h. **E** gibt sich ein einen *konkreten* Wert für ϵ vor, den er aber parametrisiert, um implizieren zu können, dass sein Vorgehen für alle Werte von ϵ funktioniert, wie es die Definition fordert.

4. **E** bestimmt K für gegebenes ϵ. Dazu löst er die Ungleichung

   $$|x_n - a| < \epsilon$$

   durch Einsatzen von x_n nach n und bringt sie dadurch in die Form

   $$n > r.h.s.$$

   Den Ausdruck $r.h.s.$ setzt er dann mit K gleich.[9]

5. **E** geht im Schnelldurchgang das ganze Vorgehen nochmals durch und fasst es für sich zusammen:

   > Sobald dass der Index n größer ist als dieses K hier, gilt, weil diese Umformung rückgängig zu machen ist, gilt diese Ungleichung hier. Also für alle $n > K$ gilt, größer diesem K gilt also diese Ungleichung [unterstreicht $|n/(n+17)-1| < \epsilon$]. Und damit ist der Beweis erfüllt. Wie gesagt, ein kleines Antwortsätzchen würd' ich jetzt noch hinschreiben, was das Ergebnis zusammenfasst. [Aufnahemteil 3, 14:50]

5 Hilfreiche Metaphern und Analogien

Von Experten verwendete Metaphern und Analogien werden im Rahmen von *Decoding the Disciplines* als potentiell wertvoll betrachtet. Sie können möglicherweise in der Lehre hilfreich sein, um Studierenden expertenhaftes Vorgehen bzw. Handeln zu vermitteln.[10]

Im Rahmen des hier analysierten Experteninterviews wurden zwei Metaphern bzw. Analogien sichtbar, die nachfolgend beschrieben werden.

[9] Strenggenommen setzt **E** nicht $K = r.h.s.$, sondern $K = \lceil r.h.s. \rceil$ wegen $K \in \mathbb{N}$.

[10] Ich verwende das Verb „vermitteln" nicht in der Bedeutung „weitergeben" (wie etwa in „diese Lehrveranstaltung vermittelt Grundkenntnisse der Analysis"), sondern im Sinne von „Mittler zwischen Stoff bzw. Expertise einerseits und Studierenden andererseits sein".

5.1 Beweis als Dialog oder Spiel

Beweise von Aussagen, die prädikatenlogische Quantoren beinhalten, können als Dialog oder epistemisches Spiel zwischen Personen verstanden werden, wobei für jeden Quantor eine Person benötigt wird. Das entsprechende ϵ–K–Spiel wurde bereits in Abschnitt 3.2 beschrieben.

5.2 Annähern als Reise

Bei der Klärung des Begriffs „näher kommen“ wurde im Interview ein Vergleich mit einer Zugfahrt gezogen. Diese Analogie ist strukturell etwas komplexer als nötig, denn der Grenzwert einer Folge ist das Ergebnis eines eindimensionalen Annäherungsprozesses, das Ziel einer Zugreise jedoch das Ergebniss eines zweidimensionalen Annäherungsprozesses. Dennoch vermittelt diese Analogie durch eine Alltagserfahrung einen wesentlichen Aspekt des Begriffs „näher kommen“, wie er in der Grenzwert–Definition verwendet wird: Eine Zugfahrt kann es mit sich bringen, dass man sich zwischenzeitlich vom Ziel entfernt.

6 Mögliche Lehrinterventionen

Die schiere Anzahl der Bottlenecks, die in Abschnitt 2 aufgelistet sind, und die Komplexität der damit verbundenen mentalen Vorgänge (siehe Abschnitt 3), können einen frustrierenden Gesamteindruck bewirken. Wie können Studierende angesichts dieser multiplen Herausforderungen jemals das lernen, was sie lernen sollen? Wie können Lehrende unter den üblichen Randbedingungen überhaupt eine Chance haben, ihre Studierenden im Lernprozess zu unterstützen?

Anderseits schaffen es immer wieder einige Studierende die Inhalte zu meistern. Vermutlich weil es ihnen gelingt, die für Experten charakteristischen mentalen Tätigkeiten zu entwickeln. Die Bottlenecks sind also auch unter den Randbedingungen an Hochschulen überwindbar – zumindest für einige Studierende und mit geeigneten Lehrinterventionen möglicherweiser für etliche mehr. Zudem sind die hier diskutierten Bottlenecks nicht unbedingt unabhängig voneinander. Manche können auf einem Streich in der Lehre adressiert werden. Ich versuche in diesem Abschnitt zu skizzieren, wie dies gelingen kann.

Dreh- und Angelpunkt jeglicher Lehrinterventionen sind Lernziele. **E** äußert sich diesbzgl. recht klar, wenn auch ernüchtert:

> Ich bin mir über meine Ziele von Jahr zu Jahr unklarer. Also ich bin tatsächlich bescheiden geworden und ich sag', wenn die [Studierenden] auf der algorithmischen und auf der Musterebene ein bisschen klarkommen, dann ist das für einen Elektroingenieur auch gut genug. Bei Informatikern, die ich erst neuerdings unterrichte, denke ich, dass dieser penible Umgang mit der Sprache, mit der wir jetzt ja auch hier ringen, dass das tatsächlich ein Qualifikationsziel gerade für Informatiker sein könnte. Weil die ja mit formalen Sprachen zu tun haben und

> weil die im Zweifelsfall auch stringenter formulieren, spezifizieren, programmieren müssen als Elektrotechniker, bei denen [...] mehr die Modellierung von physikalischen/ technischen Systemen im Vordergrund stehen. [Aufnahmeteil 3, 6:53]

In einer Veranstaltung für den Studiengang Informatik kommt bei den von **E** genannten Zielen die Analyse aus Abschnitt 3 voll zum Tragen. Aus dieser Analyse lassen sich aus meiner Sicht Eigenschaften von Lehrinterventionen ableiten, auch wenn an einigen Stellen noch tiefergehende Untersuchungen angebracht wären. Entsprechende Lehrinterventionen skizziere ich in den Abschnitten 6.1-6.3.

In einer Veranstaltung für den Studiengang Elektrotechnik sollte der Schwerpunkt vermutlich eher auf der kalkülhaften Bestimmung von Grenzwerten liegen. Die Definition des Grenzwerts erlaubt eine solche Bestimmung allerdings nicht (vgl. Abschnitt 3.1). Schlimmer noch: Die Definition bringt eine Vielzahl von Hürden mit sich, die aus dem Weg geräumt werden müssten, bevor das eigentliche Ausbildungsziel „kalkülhaftes Grenzwertberechnen“ angegangen werden kann. Um aus dieser Problematik herauszukommen, schlage ich in Abschnitt 6.4 ein Vorgehen vor, das ohne die formale Definition von Grenzwerten auskommt.

Dieser Vorschlag bringt jedoch ein Dilemma mit sich, wenn Studierende der Informatik und der Elektrotechnik in einem gemeinsamen Kurs ausgebildet werden sollen. Ein naheliegender Weg aus dem Dilemma ist, die unterschiedlichen Lernziele für die Studiengänge aufzugeben. Ein anderer Weg besteht möglicherweise darin, zunächst mit dem „Elektrotechnik–Curriculum“ aus Abschnitt 6.4 zu beginnen und dann die formale Definition des Grenzwerts folgen zu lassen. Lernziele, die mit der formalen Definition in Verbindung stehen, könnten dann für die Elektrotechnik zur Kür erklärt werden, während sie für die Informatik natürlich Pflicht sind.

Aus einer didaktischen Perspektive heraus sehe ich in einem solchen Vorgehen den Vorteil, dass so eher verständlich gemacht werden kann, warum die Definition keine Berechnung von Grenzwerten ermöglicht. Ein solches Vorgehen geht nicht den in der Mathematik und auch der Mathematiklehre üblichen Weg der Deduktion, um ausgehend von ersten Prinzipien als Fundament (hier die Grenzwert–Definition) ein Gebäude aus weiteren Eigenschaften und Berechnungsmethoden zu errichten. Das Vorgehen fängt vielmehr mit dem Gebäude an und soll zu der Erkenntnis führen, dass eine ganz bestimmte Art von Fundament nötig ist, um dieses Gebäude zu tragen.

6.1 Bottleneck 7: Bedeutung von Näherkommen

Wie in Abschnitt 3.5 erläutert hat der Begriff Näherkommen das Potential für Fehlvorstellungen. Daher scheint mir hier *elicit - confront - resolve* ein geeignetes Designmuster für eine Lehrintervention:

1. *Elicit*: Studierende machen ihre Vorstellung von Näherkommen im Kontext von Grenzwerten und Folgen explizit. Idealerweise sollten sie ihre Vorstellung schriftlich formulieren. Notfalls scheint mir auch die unten gezeigte *Multiple–Choice*–Frage auszureichen.

2. *Confront*: Diese Vorstellungen werden mit „pathologischen“ Beispielen konvergierender Folgen konfrontiert oder auch mit anderen Vorstellungen von Näherkommen. Für die „pathologischen“ Beispiele ist es wichtig, dass man bei ihnen Konvergenz erkennen kann, aber auf Grnndlage der vorab formulierten Vorstellung von Näherkommen zum Schluss kommen muss, dass diese nicht konvergieren.

3. *Resolve*: Mit *Confront* wäre schon der erste Schritt zum Ablegen der eigenen Fehlvorstellung eingeleitet, nämlich diese als problematisch zu erkennen. Der zweite Schritt besteht darin zu erkennen, dass die ϵ–K–Definition alle „pathologischen“ Beispiele als konvergent einstuft. Dazu muss Studierenden nun geholfen werden, die Grenzwert–Definition zu operationalisieren. Denkbar ist auch, dass Studierende ausgehend von den Problematiken ihrer Vorstellungen von Näherkommen eine eigene Definition von Grenzwert entwickeln und damit die Definition selbst operationalisieren.[11]

U. a. diese Folgen scheinen mir als „pathologische“ Beispiele geeignet:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{5}{n} \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right) \\ c_n &= 1 + \frac{5}{n} \sin^2\left(\frac{\pi}{16} n\right) \\ d_n &= 1 + \frac{5}{n} \sin\left(\frac{10\pi}{21} n\right) \end{aligned}$$

Sie sind in Abb. 6 graphisch dargestellt.

Das *elicit - confront - resolve* könnte idealerweise in Form eines Tutorials implementiert werden. Als Vortest könnten Studierende Folgen vergleichbar zu denen in Abb. 6 danach klassifizieren, ob sie konvergieren oder nicht. Auch die folgende *Multiple–Choice*–Frage scheint mir als Vortest geeignet:[12]

[11] Dabei ist durchaus damit zu rechnen, dass Studierende Definitionen formulieren, die sich von der Standarddefinition unterscheiden, aber zu dieser äquivalent sind, z. B.

> **Definition (Grenzwert)**: Eine Folge (x_n) hat den Grenzwert a, wenn es eine Vergleichsfolge (v_n) mit der Eigenschaft
> $$|v_n - a| < |v_{n+1} - a| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
> gibt und zudem für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
> $$|x_n - a| < |v_n - a|.$$

Diese Definition zeigt übrigens ein entscheidendes Merkmal des mathematischen Begriffs des Näherkommens: Das, womit die Folge in „näher als“ verglichen wird, darf nicht die Folge selbst sein, sondern ein „externer Maßstab“, sei es ϵ in der Standarddefinition oder (v_n) in der obigen Definition.

[12] Die Frage ist als Mehrfachauswahl gedacht, also „echtes“ *Multiple Choice*.

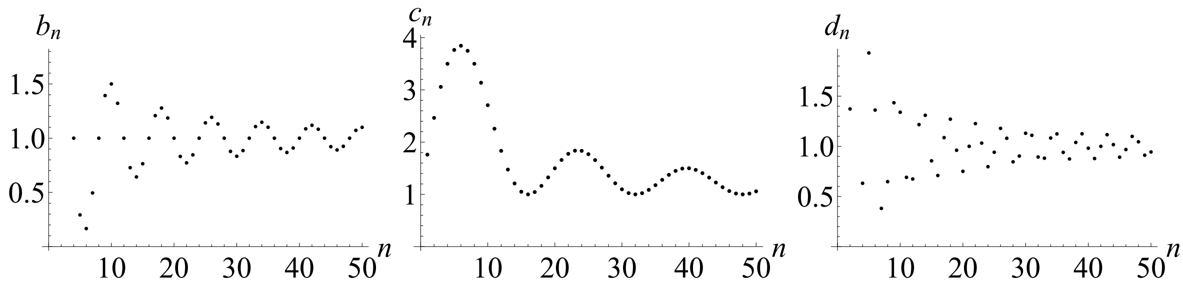

Abbildung 6: „Pathologische Beispiele“ für Folgen mit Grenzwert 1, die dem Wert 1 nicht „näher kommen“, wenn man Alltagsvorstellungen von Näherkommen zu Grunde legt.

Dass eine Folge (x_n) konvergiert, bedeutet:

(A) Egal welchen maximalen Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert man gewillt ist zu akzeptieren, dieser Abstand wird ab einem bestimmten Indexwert dauerhaft unterschritten.

(B) Die Folgenglieder x_n bewegen sich für $n \to \infty$ auf den Grenzwert zu, ohne diesen jemals zu erreichen.

(C) Die Folgenglieder x_n bewegen sich für $n \to \infty$ von einer Seite auf den Grenzwert zu, ohne jemals über den Grenzwert hinauszuschießen.

(D) Der Abstand zum Grenzwert wird immer geringer, d. h. wenn das Folgenglied x_n zum Grenzwert einen Abstand Δ hat, dann muss der Abstand des nächsten Folgenglieds x_{n+1} vom Grenzwert kleiner als Δ sein.

(E) Keines der obigen.

Ein wesentlicher Baustein des Tutorials, das ich mir vorstelle, lässt Studierende Konvergenzaussagen auf Grundlage von Fehlvorstellungen treffen (nachdem sie ihre eigene Vorstellung schriftlich formuliert haben). Das kann z. B. mittels folgender Mikrodiskussion umgesetzt werden:

Drei Studierende diskutieren, was es bedeutet, wenn eine Folge einen Grenzwert hat:

> **Augustine**: Dass eine Folge einen Grenzwert hat, veranschauliche ich mir so: Die Folge kommt dem Grenzwert immer näher, d. h. wenn das Folgenglied x_n zum Grenzwert einen Abstand Δ hat, dann muss der Abstand des nächsten Folgenglieds x_{n+1} vom Grenzwert kleiner als Δ sein.
>
> **Bourbakos**: Ich meine nicht, dass die Folge dem Grenzwert *immer* näher kommen muss. Es reicht auch aus, wenn die Folge dem Grenzwert *letztendlich* immer näher kommt. Zwischendurch darf der Abstand zwischen den Folgengliedern und dem Grenzwert auch mal größer werden.
>
> **Louis**: Dabei ist aber wichtig, dass der Grenzwert nie erreicht wird.

1. Welche dieser Vorstellung ist Ihrer am ähnlichsten?
2. Beurteilen Sie jeweils aus der Sicht von Augustine, Bourbakos und Louis, ob die in Abb. 6 dargestellten Folgen einen Grenzwert haben.

Alle hier skizzierten Tutorial–Bausteine lassen sich auch in eine normale Hörsaalveranstaltung integrieren. Dazu wird zuerst die *Multiple–Choice*–Frage als *Peer Instruction* durchgeführt. Später bearbeiten Studierende die mit der Mikrodiskussion verbundenen Arbeitsaufträge in Kleingruppen. Dem kann eine Operationalisierung der ϵ–K–Definition durch die lehrende Person folgen, auf die wiederum eine Aktivität folgt, in der Studierende diese Operationaliserung an bereits bekannten, aber auch neuen Fällen einüben.

6.2 Bottleneck 3: Indirekte, kalkülfreie Definition des Grenzwerts

Damit Studierende erkennen, dass die Grenzwert–Definition keine kalkülhafte Berechnung von Grenzwerten ermöglicht, sehe ich eine Kombination von zwei Interventionen als potentiell wirksam.

Die erste Intervention dient auch dazu, in einem *elicit*–Schritt herauszufinden, wie Studierende die Definition wahrnehmen bzw. welche Erwartung sie ihr gegenüber haben. Das kann z. B. durch die folgende *Peer–Instruction*–Frage getan werden:[13]

[13] Die Frage ist als Einfachauswahl gedacht, also *Single Choice*.

Welche der folgenden Aussagen beschreibt zutreffend, was die Definition des Grenzwerts leistet?

(A) Die Grenzwert–Definition ermöglicht den Grenzwert einer gegebenen Folge zu berechnen.

(B) Die Grenzwert–Definition ermöglicht nur den Grenzwert von konvergenten Folgen zu berechnen.

(C) Die Grenzwert–Definition ermöglicht nur zu überprüfen, ob ein vermuteter Wert für den Grenzwert tatsächlich der Grenzwert ist.

(D) Die Grenzwert–Definition ermöglicht keine der oben genannten Dinge.

Möglicherweise klärt die Diskussionsphase der *Peer Instruction* schon für viele Studierende, dass die Definition keine Berechnung von Grenzwerten ermöglicht. Von Lehrendenseite kann dies ergänzt werden, indem die verschiedenartigen Strukturen der Definitionen wertbehafteter Größen durch Diagramme der Art der Abbildungen 1-4 visualisiert werden.

Der zweite Teil der Intervention besteht darin, die gewonnene Erkenntnis zu verallgemeinern. Dazu sollten Studierende alle Definitionen, die sie bisher im Kurs kennengelernt haben, dahingehend untersuchen, ob diese wertbehaftete Größen definieren und ob sie deren direkte Berechnung erlauben. Dies sollte auch bei zukünftig neu hinzukommenden Definitionen wiederholt werden.

Anders formuliert sehe ich hier die Chance die Aufmerksamkeit der Studierenden auf die Struktur mathematischer Definitionen zu lenken. McTighe und Silver [5] empfehlen Kursinhalte nicht entlang von Inhalten, sondern entlang „großer Ideen“ zu strukturieren. Um zu unterstreichen, dass der Fokus auf einer großen Idee liegt und nicht auf einer thematischen Einheit, empfehlen sie außerdem Lektionen mit „*A study in ...*“ zu überschreiben. Hier könnte die Überschrift sein: „Grenzwerte – eine Untersuchung, warum mathematische Definitionen so sind, wie sie sind“.

Die hier skizzierten Lehrinterventionen könnten auch Teil des in Abschnitt 6.1 angedachten Tutorials sein.

Zusätzlich kann es lohnend sein, Studierende an passender Stelle erkennen zu lassen, dass die Werkzeuge der Grenzwertberechnung die Kenntnisse anderer Grenzwerte voraussetzen. Bei den arithmetischen Grenzwert–Rechenregeln wird die Kenntnis von elementareren Grenzwerten vorausgesetzt, siehe Abschnitt 6.4. Eine *direkte* Berechnung von Grenzwerten ist dadurch also ebenfalls nicht möglich.

6.3 Bottleneck 8: Zurechtkommen mit Symbolen

Um Studierenden zu helfen, dieses Bottlenck zu meistern, könnte es hilfreich sein, in der Definition möglichst ohne Symbole auszukommen. Eine mögliche, eher informelle Formulierung könnte sein:

Informelle Definition (Grenzwert): Man sagt, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert a, wenn bei jeder noch so kleinen tolerierten Abweichung der Folgenglieder vom Grenzwert ab einem bestimmten Index alle Folgenglieder nicht um mehr als diese Toleranz vom Grenzwert abweichen.

Hinter diesem Vorgehen steht die Hoffnung, dass Studierende die Bedeutung der beteiligten Größen leichter erkennen können und damit die Definition leichter operationalisieren können, wenn die Symbole ϵ, K usw. versprachlicht sind. Selbst wenn dies Studierenden nicht spontan gelingt, etwa weil ihnen die Bedeutung von Toleranz unklar ist, dürften solche Formulierungen Studierende eher ermutigen klärende Fragen zu stellen als die verbreitete „Lehrbuch–Definition". Ich vermute, dass Studierende eher fragen „Was ist denn mit Toleranz gemeint?" als „Was ist denn mit ϵ gemeint?"

In einem Curriculum, das wie das in Abschnitt 6.4 skizzierte ohne Formalisierung des Grenzwertbegriffs auskommen will und den Schwerpunkt auf das kalkülhafte Berechnen von Grenzwerten setzen will, könnte eine solche Formulierung der Definition der Endpunkt sein. Studierende sähen dann, dass es einen argumentatorischen Startpunkt gibt, von dem „elementare Grenzwerte" abgeleitet werden, die dann als Bauelemente bei der Berechnung von Grenzwerten dienen. Gewissermaßen ist das vorgeschlagene Vorgehen eine Vermeidungsstrategie: Es soll vermieden werden, dass Studierende im Bottleneck hängen bleiben, indem das Bottleneck erst gar nicht auftritt.

Für weitergehende Curricula könnten solche Formulierungen ein Zwischenschritt sein, der insbesondere erlaubt, zunächst Bottleneck 7 zu adressieren, bevor der Grenzwertbegriff gänzlich formalisiert wird. In diesem Fall können vermutlich die in der formalen Grenzwert–Definition verwendeten Symbole schadlos in die obige, informelle Grenzwert–Definition eingefügt werden:

Informelle Definition (Grenzwert): Man sagt, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert a, wenn bei jeder noch so kleinen tolerierten Abweichung ϵ der Folgenglieder vom Grenzwert ab einem bestimmten Index K alle Folgenglieder x_n um nicht mehr als diese Toleranz vom Grenzwert a abweichen.

6.4 Curriculum mit Fokus auf kalkülhaftes Bestimmen von Grenzwerten

Um Grenzwerte berechnen zu können, braucht es ein Kalkül. Dieses Kalkül wird (zum Teil) durch folgenden Satz geliefert:

Rechenregeln für konvergente Folgen: Konvergieren die Folgen (x_n) und (y_n) mit den Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} x_n$ bzw. $\lim_{n\to\infty} y_n$, dann konvergieren auch die Folgen $(c \cdot x_n)$ mit $c \in \mathbb{R}$, $(x_n \pm y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ und (x_n/y_n) mit den Grenzwerten

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (c \cdot x_n) &= c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \\
\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n \\
\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \\
\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} &= \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}, \text{ falls } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.
\end{aligned}$$

Eine Analyse dieses Satzes macht folgendes deutlich: Grenzwerte können nur berechnet werden, wenn sie auf elementarere Grenzwerte zurückgeführt werden können, die allerdings vorab bekannt sein müssen. Daher ist ein weiteres Werkzeug nötig, was erlaubt diese elementareren, letztendlich atomaren Grenzwerte zu bestimmen. Die Grenzwert–Definition ist dieses Werkzeug.

Anders betrachtet bedeutet dies aber auch, um *nur* Grenzwerte berechnen zu können, kann man ohne Definition auskommen, wenn man einen ausreichenden Baukasten elementarer Grenzwerte hat. Ich denke, dass man einen Kurs, der die Berechnung von Grenzwerten als prominentes Lernziel hat, aber nicht das konzeptuelle Verständnis, auf dieser Analyse aufbauen kann.

Ein solcher Kurs würde auf dem intuitiven Grenzwertverständnis der Studiereden aufbauen müssen. Dieses Verständnis ist in Teilen problematisch, in Teilen aber auch fruchtbar. Die problematischen Teile sollten zu Beginn möglichst ausgeräumt werden. Ich denke, dass Fehlvorstellungen wie „alternierende Folgen konvergieren nicht“ und „der Abstand zum Grenzwert muss monoton geringer werden“ mit qualitativen Aktivitäten wie in Abschnitt 6.1 effektiv ausgeräumt werden können, ohne dass die formale Grenzwert–Definition benötigt wird.

Im Kursverlauf würden an Stelle einer formalen Definition die obigen Rechenregeln (zusammen mit dem oben genannten „Baukasten“ elementarer Grenzwerte) der formale Startpunkt sein. Dabei halte ich es für wichtig, dass die Studierenden wahrnehmen, dass diese Rechenregeln nur unter Voraussetzungen anwendbar sind. Möglicherweise sollte man dazu soweit gehen, die übliche Lehrbuchformulierung des Theorems aufzugeben und durch eine Formulierung zu ersetzen, die diesen Punkt sehr deutlich benennt. Die folgende Variante könnte das leisten:

Rechenregeln für konvergente Folgen: Gilt die Voraussetzung, dass (x_n) und (y_n) konvergente Folgen sind (also jeweils einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$ bzw. $\lim_{n\to\infty} y_n$ haben), dann gilt,

1. dass auch die Folgen $(c \cdot x_n)$ mit $c \in \mathbb{R}$, $(x_n \pm y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ und (x_n / y_n) konvergente Folgen sind

2. dass ihre Grenzwerte wie folgt berechnet werden können:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (c \cdot x_n) &= c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \\
\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n \\
\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \\
\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} &= \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}, \text{ falls } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0
\end{aligned}$$

Studierende müssen im Weiteren lernen zu erkennen, wann dieses Theorem anwendbar ist. Dazu können sie mit Situationen konfrontiert werden, in denen die Rechenregeln nicht angewendet werden können, eben weil mindestens eine Voraussetzung nicht erfüllt ist oder nichtarithmetische Operationen verwendet werden[14]. Durch letzteres kann auch motiviert werden, dass weitergehende Werkzeuge zur Grenzwertberechnung benötigt werden, die dann später eingeführt werden können.

Weiterhin halte ich es für wichtig, das Studierende erkennen, dass die Rechenregeln die Berechnung von Grenzwerten nur ausgehend von bekannten und korrekten Grenzwerten erlauben. Studierende sollten dazu gebracht werden zu fragen, woher diese Grenzwerte kommen, und zu erkennen, dass das Gebäude der Grenzwertberechnung, das in der Vorlesung aufgebaut wurde, auf Sand gebaut ist, solange es keine formale Definition gibt, die u. a. diese elementaren Grenzwerte zu bestimmen erlaubt.

In einem Curriculum, dass die formale Definition des Grenzwerts ausparen will (etwa in einem Studiengang Elektrotechnik), kann Studierenden die Definition kurz gezeigt werden mit den Worten, dass dies nicht Gegenstand des Kurses ist. Dafür reicht auch die informelle Definition aus Abschnitt 6.3. In anderen Curricula wäre dies der Anlass den Grenzwertbegriff zu formalisieren.

Im erstgenannten Curriculum sollte penibel darauf geachtet werden, dass Studierende immer die benötigten elementaren Grenzwerte angeben und deren Quelle benennen. Dies kann eine Liste von Grenzwerten sein, die den Studierenden zur Verfügung gestellt wird und im Laufe der Veranstaltung wachsen kann. Die Quelle kann in Ausnahmefällen auch die intuitive Vorstellung sein — mit der Konsequenz, dass die auf dieser Grundlage berechneten Grenzwerte falsch sein können. Wenn Studierenden dies bewusst ist, halte ich dieses Vorgehen für akzeptabel.

[14] Z. B.: Berechnen Sie mit dem Vorwissen $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+17} = 1$ den Wert von $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+17}}$.

Ab da kann sich der Kurs auf die Fertigkeiten konzentrieren, die **E** im Interview als Rechenfertigkeit und Mustererkennung bezeichnet hat. Dabei kann Mustererkennung durch die Theoreme operationalisiert werden, die die Studierenden zur Verfügung haben. Für das obige Theorem der Rechenregeln bedeutet Mustererkennung zu erkennen, dass eine Folge als Summe, Produkt oder Quotient von Folgen mit bekanntem Grenzwert geschrieben werden kann.

7 Zusammenfassung, Reflexion und Ausblick

Das hier analysierte Interview hat eine erstaunliche Anzahl von Bottlenecks offengelegt und teilweise auch die damit in Verbindung stehenden Expertenstrategien. Einige der Analysen sind sicherlich von meinen eigenen Vorerfahrungen und aktuellen Interessen beeinflusst. Ich denke insbesondere an die Bottleneck–Analysen in den Abschnitten 3.2-3.4 und an die Art der Lehrinterventionen, die ich in Abschnitt 6 beschrieben habe.

Die zentralen Bottlenecks sind vermutlich Nr. 5 (Operationalisieren der Definition) und Nr. 7 (Bedeutung von Näherkommen). Bei beiden hat das Interview sowohl das Bottleneck geschärft als auch die Expertenstrategie offengelegt.

Für ein konkretes Ausarbeiten von Lehrinterventionen sollten die darin thematisierten Bottlenecks noch empirisch untersucht werden. Ich denke, dass dazu kein ausgeklügeltes Forschungsdesign notwendig ist und dies durch formative Assessments erreicht werden kann. Beispielsweise sollten die beiden *Peer–Instruction*–Fragestellungen aus Abschnitt 6 geeignet sein empirisch zu verifizieren, ob die vermuteten Fehlvorstellungen zu Näherkommen und dem kalkülfreien Charakter der Grenzwert–Definition tatsächlich vorhanden sind.

Grenzwerte sind eine Thematik, die in jedem Studienjahr in wohl allen technischen Studiengängen behandelt wird. Die Problematik hat daher aus meiner Sicht eine Größenordnung, die mehr erfordert als ein paar engagierte Einzelkämpfer. Ich würde mir wünschen, dass sich eine Gruppe Lehrender zusammen findet, die gemeinsam geeignete Lehrinterventionen entwickeln und testen und die Thematik in ihrer Lehrpraxis weiter erforschen.

Literatur

[1] Riegler, P. (2019). Lost in language comprehension: Decoding putatively extra-disciplinary expertise. In *Proceedings of EuroSoTL19: Exploring new fields through the Scholarship of Teaching and Learning*, S. 685-691, Bilbao.

[2] Ferreira, F., & Patson, N. D. (2007). The 'good enough' approach to language comprehension. Language and Linguistics Compass, 1(1-2), pp. 71-83.

[3] Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. The American Mathematical Monthly, 111(5), 411-424.

[4] Riegler, P. (2016). Fostering Literacy in and via Mathematics. Zeitschrift für Hochschulentwicklung, 11(2).

[5] McTighe, J., & Silver, H. F. (2020). Teaching for Deeper Learning: Tools to Engage Students in Meaning Making. ASCD.